カオス的挙動を示す正確にとけるモデル

東北大・工　桂　重俊，福田　亙

1次元マッピング

$$x_{n+1}=f(x_n)$$

は$f(x)$が非線型のとき複雑な様子を示す。解は周期解，収束解，カオス解に分類される。多くの例題は数値計算でしらべられて居り，解析解の得られているのは

Ex. 1　$x_{n+1}=4x_n(1-x_n)\qquad 0\leq x_n\leq 1$

Ex. 2　$x_n=\begin{cases}2x_n & 0\leqq x_n\leqq 1/2\\ 2(1-x_n) & 1/2\leqq x_n\leqq 1\end{cases}$

のみである。我々は exact な解析解をもつ例を多数見出したので報告する。

Ex. 3　$x_{n+1}=x_n(3-4x_n^2)\qquad -1\leqq x_n\leqq 1$

$$x_n=\sin(3^n\sin^{-1}x_0)$$

Ex. 4　$x_n=\begin{cases}2x_n & 0\leqq x_n<1/2\\ 2x_n-1 & 1/2\leqq x_n<1\end{cases}$

$$x_n=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(\cot 2^n\pi x_0)$$

Ex. 5　$x_{n+1}=16x_n(1-x_n)(1-2x_n)$

$$0\leqq x\leqq 1$$

$$x_n=\sin^2(4^n\sin^{-1}\sqrt{x_0})$$

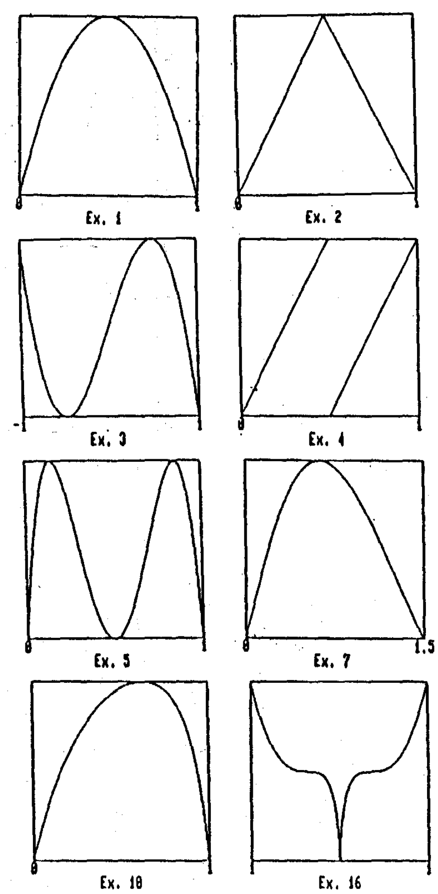

図1

Ex. 7　$x_{n+1}=24-84X_n^{1/2}+100X_n-48X_n^{3/2}+8X_n^2\qquad 0\leqq x_n\leqq 3/2$

$$X_n=1+2x_n$$

$$x_n=\sin^2(2^n\sin^{-1}(\sqrt{x_0}-1))+\frac{1}{2}\sin^4(2^n\sin^{-1}(\sqrt{X_0}-1))$$

Ex. 10　$x_{n+1}=\dfrac{4x_n(1-x_n)(1-k^2\cdot x_n)}{(1-k^2x_n^2)^2}\qquad 0\leqq x_0\leqq 1,\ 0\leqq k^2\leqq 1$

$$x_n = \mathrm{sn}^2(2^n \,\mathrm{sn}^{-1}(\sqrt{x_0},\ k),\ k)$$

Ex. 16 $\quad x_{n+1} = (2x_n^{2/3} - 1)^3 \qquad -1 \leqq x_n \leqq 1$

$$x_n = \cos^3(2^n \cos^{-1} x_0^{-1/3})$$

Exs. 2. 4 等においては $x_0 = q/p$（p, q は整数）のとき x_n は周期的，他の場合カオス的である。Exs. 1. 7 では $\sin^{-1}\sqrt{x_0}$ が $q\pi/p$ のとき周期的，他の場合カオス的である。

図 1 に $f(x)$ の図を示す。図 2 は Ex. 4 について $x_0 = 2/3 - 2/2100000009$ のとき周期＝18918898 となることを示した例である。マッピングの計算では数値計算の精度は極めて重大で一般に無限多倍長の結果以外は信頼し難い。図 3 に Ex. 5 の正確解と数値計算の比較を示す。

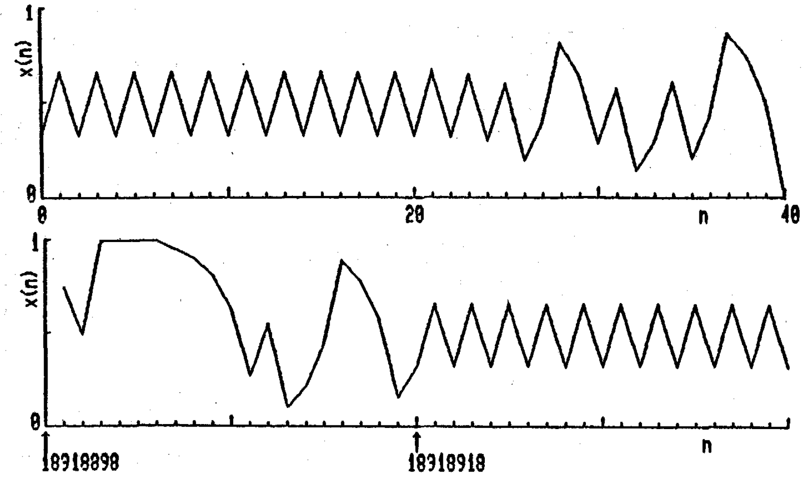

図2

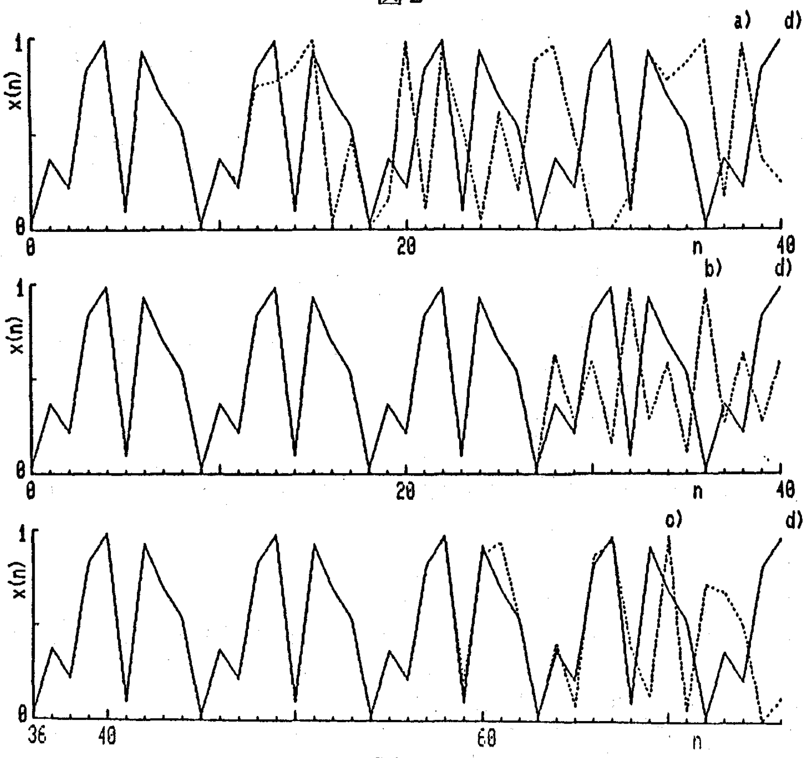

図3

d) は，正確解。a), b), c) はそれぞれ，単精度，倍精度，4倍精度を用いて数値計算し求めた解である。

詳細はPhysica A (印刷中) の論文を参照されたい。(本文の図番号は本論文の図番号と合わせてつけた。)

自己相似性について

京大・理　畑　　政　義

自己相似性の概念そのものは，数学においては古くから知られた手法の一つであって，数々の反例を得るのに用いられてきた。例えば，いたるところ微分不可能な連続関数として知られているWeierstrassの関数 (図1) や高木の関数 (図2) などは，いわゆる"特異性の凝縮"と呼ばれる手法によって構成されているし，Peano曲線や正の二次元Lebesgue測度を持つ Jordan 曲線なども，自己相似的構成法によって得られる。またCantorや，Koch曲線については，そのHausdorff次元が，正確に計算出来るのは，それらが空間的に，一様な自己相似性を持っているからと考えられる。

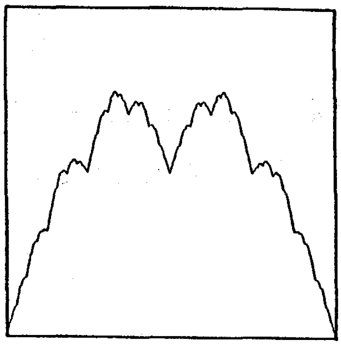

図1

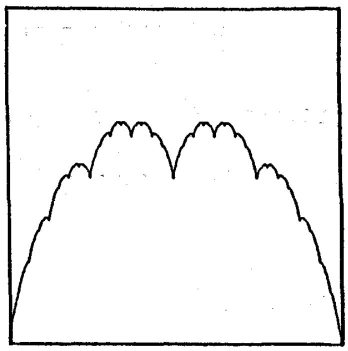

図2

さて，ここでは，その様な自己相似的な集合を数学的に取扱う一つの方法を提案したい。すなわち，完備距離空間E内の空でないcompact集合Xが，E内のm個の縮小写像$f_1, \cdots, f_m$に対する不変集合であるときは，次の集合方程式を満たすときに言う。

$$X = f_1(X) \cup f_2(X) \cup \cdots \cup f_m(X).$$

この定義の意味は明らかであろう。すなわち，一つの集合Xが，m個の自分のminiaturesから成り立っているというのであるから，まさに自己相似性そのものを表わしているのである。

驚くべきことは，たったこれだけの式からいろいろな事実が導出できることである。R. F. Williams[3]は，表現は異なるが，本質的に，この集合方程式に対する解の存在と一意性を示